MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA FONSECA
COORDENAÇÃO DE CONCURSOS – CCONC
Edital 04/2023 – Professor Efetivo
Matemática - Itaguaí

Todas as respostas devem ser devidamente justificadas.

1. (a) (0.8 ponto) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^5+x} e^{-t^2}\, dt$. Mostre que $x = 0$ é o único zero da função f e calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.
   (b) (0.7 ponto) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|g(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Verifique se g é contínua em $x = 0$ e se g é derivável em $x = 0$.
   (c) (0.5 ponto) Determine a expressão que representa a média de uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
   (a) (0.7 ponto) Mostre que T é transformação linear.
   (b) (0.5 ponto) Seja Ω uma região limitada do plano xy com área k. Qual a relação entre as áreas de Ω e de $T(\Omega)$?
   (c) (0.8 ponto) Resolva $\iint_D (x + y)e^{x^2-y^2} dA$, onde D é a região do plano xy limitada pelas retas $x + y = 0$, $x + y = 3$, $x - y = 0$ e $x - y = 2$. (Sugestão: use T dada para fazer uma mudança de variáveis.)

3. (a) (1.2 ponto) Considere o seguinte Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 3t + 2y, \\ y(1) = 5. \end{cases}$$

   Escreva um algoritmo (em qualquer linguagem de programação ou em pseudo-código, sem preocupação com sintaxe) que determine uma aproximação de $y(3)$ utilizando o método de Euler com N passos.
   (b) (0.8 ponto) Compare o método de Runge-Kutta com o método de Euler para resolução numérica de problemas de valor inicial (que possuem solução única) em equações diferenciais ordinárias, abordando o seguinte aspecto: redução do erro entre a solução exata e uma solução aproximada quando dobramos o número de passos dos métodos.

4. (a) (0.5 ponto) Prove que se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem $ay'' + by' + cy = 0$, cujos coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 reais.
   (b) (0.5 ponto) Deduza a fórmula da solução geral real da EDO do item (a) quando $b^2 - 4ac < 0$, encontrando duas soluções linearmente independentes.
   (c) (0.4 ponto) Determine a solução geral da EDO $y'' - 4y' + 4y = 0$ (sem necessidade de dedução da fórmula da solução geral da EDO).
   (d) (0.6 ponto) Determine a solução geral da EDO $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2t}$ (sem necessidade de dedução da fórmula da solução geral da EDO homogênea).

5. (2.0 pontos) Considere $u(x, t)$ tal que $u_{xx} = u_t$ com $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para todo $t > 0$ e $u(x, 0) = f(x)$ para $x \in [0,\ \pi]$. Utilize o método de separação de variáveis e séries de Fourier para deduzir a fórmula de $u(x, t)$.